Centre Ibn Abdoune — **21/01/2020**
Classes Préparatoires — **MP 1**
Khouribga — **ELOUADIH**

Série 12 : Séries entiéres

Exercice 1
Déterminer le rayon de convergence de la série entiere $\sum\limits_n a_n z^n$:
$a_n = n^{eme}$décimale $de\sqrt{2}$;$a_n =$ nombre de diviseurs $\geq$ 1de n ;
$a_n =$ somme de diviseurs $\geq$ 1de n ; $a_n = arccos(\frac{n-1}{n})$;$a_n = \frac{ch(n)}{sh^2(n)}$;$a_n = \ln(n)$;$a_n = \frac{n!}{n^n}$;
$a_n = \frac{n^2}{3^n}$;$a_n = e^{-n^2}$;$a_n = n!$;$a_n = 2 + in$;$a_n = \frac{n+i}{2+in}$; $a_n = n^{(-1)^n}$;

Exercice 2
Déterminer le rayon de convergence des séries entieres suivantes :
$\sum\limits_n \frac{ln(n)}{n^2} z^{2n}$;$\sum\limits_n \frac{n^n}{n!} z^{3n}$;$\sum\limits_n \binom{2n}{n} z^{4n}$;$\sum\limits_n \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^{3n}$;
$\sum\limits_n z^{n^2}$;$\sum\limits_n z^{n!}$;$\sum\limits_n \frac{(1+i)^n}{n2^n} z^{3n}$

Exercice 3
Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entiéres :

$$\sum(n^3+2n+1)x^n ;\sum \frac{1}{(n+1)(n+3)}x^n ;\sum ch(n)x^n ;\sum \frac{2n-1}{2n+1}x^n ;\sum \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}x^n ;$$
$$\sum(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})x^n ;\sum(1+2^2+...+n^2)x^n \ \sum \frac{x^{3n}}{(3n)!} ;\sum \frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

Exercice 4
Développer en série entiere à l'origine les fonctions suivantes :
$f(x) = a^x; f(x) = e^{a+x}; f(x) = ln(a+x); f(x) = \frac{1}{a-x}$ où $a > 0$
$f(x) = e^{-x}sin(x); f(x) = ch(x)cos(x); f(x) = ln(1+x-2x^2); f(x) = (arcsinx)^2; f(x) = (arctanx)^2; f(x) = sin(x)cos(x); f(x) = sin^3(x); f(x) = ln(x^2+x+1)$

Exercice 5 ***Inverse d'une fonction développable en série entiere***
Soit $\sum a_k z^k$ une série de rayon de convergence $R_a > 0$ et de premier terme $a_0 = 1$

1. Supposons qu'il existe une série $\sum b_k z^k$ de rayon de convergence $R_b > 0$ telle que :
   $\forall |z| < min(R_a, R_b) (\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k)(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k z^k) = 1$
   Montrer que la suite (b_k) est unique et donnée par des relations qu'on explicitera.
2. Soit inversement la série entiere $\sum b_k z^k$ définie par les relations précédentes.
   (a) Soit $r \in]0, R_a[$,Justifier que $\exists M \geq 1$ tel que $\forall k \in \mathbb{N} |a_k r^k| \leq M$
   (b) En déduire qu'on a alors $\forall k \in \mathbb{N} |b_k r^k| \leq 2^k M^k$,
   (c) Montrer que $R_b > 0$
3. Soit f une fonction développable en série entiere au voisinage de 0 avec $f(0) \neq 0$
   En déduire que $\frac{1}{f}$ est développable en série entiere au voisinage de 0

Exercice 6 ***Continuité d'une série entiere sur le cercle de convergence***
On considére une série entiere $\sum a_k x^k$de somme S et de rayon$R = 1$

1. **Un cas particulier simple** :$\sum a_n$ converge absolument
   Montrer que S est définie et continue sur $B_f(0,1)$
2. **Théoreme d'Abel :**On suppose $\sum a_n$est convergente. En posant $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$,et
   en remarquant $a_k = R_{k-1} - R_k$,
   montrer que : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, p \in \mathbb{N}) n \geq N \Rightarrow |\sum\limits_{n+1}^{n+p} a_k x^k| \leq \varepsilon$
   En déduire que $\lim\limits_{x \to 1} S(x) = S(1)$

Exercice 7
Fonction indéfiniment dérivable non DSE
Soit la fonction définie par $f(x) = \exp(\frac{-1}{x^2}) et f(0) = 0$

1. Montrer que $\forall x \neq 0 f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x^2)}{x^{3n}} \exp(\frac{-1}{x^2})$
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que f n'est pas développable en série entiere en 0

Exercice 8 ***Formule intégrale de Cauchy***
Soit$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$définie sur $B(0,R)$ avec $R > 0$
Etablir que $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$ avec $0 < r < R$
Justifier que l'intégrale est bien définie.

Exercice 9
On considére la série entiere $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{x^n}{4n-1}$

1. Rayon de convergence
2. Somme
3. somme pour $x = -1$

Exercice 10
Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

1. Rayon de convergence
2. Montrer que f satisfait l'équation différentielle :$(1 - x^2)y' - xy = 1$
3. Déduire une expression de f

Exercice 11
Déterminer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et$(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$

Exercice 12
Montrer que $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f^{(n)}(0)$

As for everything else, so for a mathematical theory : beauty can be perceived but not explained