Centre Ibn Abdoune — **30/11/2019**
Classes Préparatoires — **MP 1**
Khouribga — **ELOUADIH**

Série 8 : Espaces préhilbertiens

Exercice 1
Montrer que l'application $(P,Q) \to \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)Q(n)e^{-n}$est un produit scalaire sur$\mathbb{R}[X]$

Exercice 2
Orthonormaliser la base (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^3$ où $f_1 = (1,1,1), f_2 = (1,-1,1) et f_3 = (1,0,0)$

Exercice 3
On considére une norme $||.||$ sur E vérifiant l'égalité du parallélogramme,et on se propose d'établir qu'elle est associée à un produit scalaire .Pour cela , on pose :
$(\forall x, y \in E), B(x,y) = \frac{1}{4}||x+y||^2 - \frac{1}{4}||x-y||^2$

1. Etablir ,pour $x, y \in E$, la relation $B(x,y) = 2B(x, \frac{y}{2})$
2. En déduire ,pour $x_1, x_2, y \in E$, la relation $B(x_1 + x_2, y) = B(x_1, y) + B(x_2, y)$
3. Etablir ,pour $x, y \in E$, la relation $B(\lambda x, y) = \lambda B(x,y)$ pour $\lambda \in \mathbb{Q}$,puis pour $\lambda \in \mathbb{R}$
4. Etablir enfin que B est un produit scalaire sur E ,dont $||.||$est une norme

Exercice 4 ***Polynômes d'Hermite***

1. Justifier l'existence de l'intégrale suivante pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$,puis Montrer que l'application $(P,Q) \to < P|Q >= \int_{\mathbb{R}} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ définit un produit scalaire sur$\mathbb{R}[X]$
2. On pose $H_n(t) = e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2})$ pour $n \in \mathbb{N}$
   (a) Montrer que H_n est un polynôme de degré n
   (b) Montrer que la famille (H_n) est orthogonale pour ce produit scalaire

Exercice 5 ***Polynômes de Legendre***
On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire classique $< P|Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ On introduit la famille (L_n) des polynômes de Legendre sur $[0,1]$,définie par $L_n(X) = \frac{d^n}{dX^n}(X^n(X-1)^n)$

1. Montrer que la famille (L_n) est orthogonale ,et calculer $||L_n||$
2. Montrer que l'orthonormalisée de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ est la famille $\frac{L_n}{||L_n||}$

Exercice 6
On munit $E = \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$du produit scalaire suivant $< f|g >= \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$

1. Montrer que les sous espaces P et I des fonctions paires et impaires sont supplémentaires orthogonaux
2. Montrer que l'orthogonal du sous espace $\mathcal{P}$ des fonctions polynômes est $\{0_E\}$
   En déduire que $\mathcal{P} \neq (\mathcal{P}^\perp)^\perp$et que $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp \neq E$
3. Déterminer l'orthogonal du sous espace $F = \{f \in E / \forall t \in [0,1] f(t) = 0\}$
   En déduire que $F = (F^\perp)^\perp$ mais que $F \oplus F^\perp \neq E$

Exercice 7
Soient F et G deux sous-espaces de E euclidien. Montrer :

$$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp} et (F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$$

Exercice 8
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel $< M|N >= tr((^tM)N)$.On désigne par f l'endomorphisme défini par $f(M) = AM - MB$ où $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Déterminer l'adjoint de f, et en déduire à quelle condition on a $f^* = f$

Exercice 9
Montrer que les valeurs propres d'une matrice réelle et antisymétrique sont nulles ou imaginaires pures

Exercice 10
Déterminer la matrice de la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan H d'équation $x_1 + x_3 = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$

Exercice 11
Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur$D = \mathbb{R}(1, -2, 1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Exercice 12
On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique.On considère le plan P d'équation :$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=0 \end{cases}$

1. Déterminer une b.o.n de P
2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur P dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$

Exercice 13
Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$

Exercice 14 ***CCP2018***
On note E l'espace vectoriel des applications continues sur le segment [-1,1] et à valeurs réelles.

1. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant pour f et g éléments de E :$< f|g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$
2. On note $u : t \to 1, v : t \to t$et $F = vect\{u, v\}$, déterminer une base orthonormée de F.
3. Déterminer le projeté orthogonal de la fonction $w : t \to e^t$ sur le sous-espace F et en déduire la valeur du réel $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (e^t - (a+bt))^2 dt$
   On pourra simplifier les calculs en utilisant le théorème de Pythagore.

Exercice 15
Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$,on pose $< P|Q >= \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$

1. Montrer que $(\mathbb{R}[X], < .|. >)$ est un espace préhilbertien réel
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $f(P) = XP" - (X-1)P'$
   (a) Prouver que f est autoadjoint

(b) Déterminer les valeurs propres de f

(c) Montrer que les sous espaces propres de sont deux à deux orthogonaux

3. (a) Établir qu'il existe un unique n-uplet $(a_0, a_1, ..., a_n)$ de réels vérifiant
$(X-1)(X-2)...(X-n) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(X+1)(X+2)...(X+k)$

   (b) Vérifier que $A(X) = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ est orthogonal à $vect(X, X^2, ..., X^n)$

   (c) En déduire $d(1, vect(X, X^2, ..., X^n))$

4. Déterminer de même $d(X^n, vect(1, X, X^2, ..., X^{n-1}))$

Exercice 16

Pour $f, g \in \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$,on pose $< f|g >= \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt$

1. Montrer que $<.|.>$ est bien défini
2. Montrer que $(\mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R}), < .|. >)$ est un espace préhilbertien réel
3. Calculer $< x^p|x^q >$ et déterminer la norme de la fonction -polynôme x^n
4. Soit T l'endomorphisme de $\mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ défini par :
$T(f)(x) = (x^2-1)f"(x) + (2x+1)f'(x)$
   (a) Prouver que T est autoadjoint
   (b) Déterminer les réels λ_n pour les quels existe un polnôme de degré n tel que $TP_n = \lambda_n P_n$
   (c) Montrer que les polynômes P_n etP_m sont orthogonaux si $n \neq m$ et calculer la norme de P_n
5. Soit f une fonction continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.Etablir l'existence d'une suite réelle (c_n) telle que ,pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f - (c_0P_0 + ... + c_nP_n)\|$ soit minimale

Exercice 17 ***Endomorphisme symétrique défini positif***

E un espace euclidien f un endomorphisme symétrique de E.
On dit que f est positif si $\forall x \in E < f(x) \mid x > \geq 0$
On dit que f est défini positif si $\forall x \in E - \{0_E\} < f(x) \mid x >> 0$

1. Montrer que f est positif $\Leftrightarrow sp(f) \subset [0, +\infty[$
2. Montrer que f est défini positif $\Leftrightarrow sp(f) \subset]0, +\infty[$
3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$
   (a) Montrer que f^*of est symétrique positif
   (b) Montrer que si f est symétrique alors $\|f\| = \max\{|\lambda|/\lambda \in Sp(f)\}$
   (c) Montrer que si f est quelconque alors $\|f\| = \max\{\sqrt{\lambda}/\lambda \in Sp(f^*of)\}$

Exercice 18 ***Racine carrée d'un endomorphisme symétrique défini positif***

1. Montrer qu'un endomorphisme auto-adjoint défini positif f amet une et une racine carrée auto-adjointe et définie positive
2. Quelle est la racine carrée de la matrice définie positive $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. Montrer,pour tout automorphisme f, qu'il existe une unique factorisation f=uop avec u automorphisme orthogonal et p automorphisme auto-adjoint défini positif

Exercice 19
Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in O_n(\mathbb{R})$.Montrer que $|\sum\sum a_{i,j}| \leq n$

Exercice 20 ***Réduction des endomorphismes antisymétriques dans E euclidien***
On considère un endomorphisme antisymétrique f c.à.d $f^* = -f$

1. Que dire de la matrice en base orthonormale de f ?
2. Établir que les valeurs propres de f^2 sont réelles ,négatives ou nulles.
3. Comparer $Ker(f)$ et $Ker(f^2)$
4. Établir que tout sous espace propre de f^2 associé à une valeur propre non nulle λ a des bases orthonormales de la forme $(e_1, \frac{f(e_1)}{\sqrt{-\lambda}}, ..., e_p, \frac{f(e_p)}{\sqrt{-\lambda}})$
5. Établir qu'on a une base orthonormale de E par réunion de ces bases orthonormales des sous espaces $Ker(f^2 - \lambda id_E)$ associés aux valeurs propres non nulles de f^2 et de $Ker(f)$ si $Ker(f) \neq \{0_E\}$ puis écrire la matrice de f dans celle-ci

Exercice 21 ***Déterminant de Gram et distance d'un vecteur à un sous espace***
Étant donnés p vecteurs $v_1, ..., v_p$ d'un espace préhilbertien E ,on convient d'appeler matrice de Gram des vecteurs $v_1, ..., v_p$ la matrice d'ordre p définie par

$$Gram(v_1, ..., v_p) = \begin{pmatrix} < v_1 \mid v_1 > & \cdots & < v_1 \mid v_p > \\ \vdots & & \vdots \\ < v_p \mid v_1 > & \cdots & < v_p \mid v_p > \end{pmatrix}$$

1. Etablir ,pour $v_{p+1} \in E$ et pour toute famille de scalaires $\lambda_1, ...\lambda_p$,la relation $det(Gram(v_1, ..., v_p, v_{p+1})) = det(Gram(v_1, ..., v_p, v_{p+1} - \lambda_1 v_1 - ...\lambda_p v_p))$
2. Etablir que $rg(Gram(v_1, ..., v_p)) = rg(v_1, ..., v_p)$
3. On suppose $v_1, ..., v_p$ indépendants et on pose $F = vect(v_1, ..., v_p)$.Etablir que la distance $d(a, F)$ de $a \in E$ à F est donnée par la formule :
$det(Gram(v_1, ..., v_p, a)) = det(Gram(v_1, ..., v_p))d^2(a, F)$

Exercice 22
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille de vecteurs **unitaires** d'un espace prehilbertien reel telle que
$\forall x \in E \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} < e_i \mid x >^2$
Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E

Exercice 23
Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$dont la matrice est :
$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 24
Vérifier que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique.Est- t- elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?