Centre Ibn Abdoune **30/10/2019**
Classes Préparatoires **MP 1**
Khouribga **ELOUADIH**

Série6: Compléments d'algébre linéaire

Exercice 1
Montrer que $E = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}/(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3\}$ est un $\mathbb{Q}$ e.v.et en donner la dimension.

Exercice 2
Soit E un $\mathbb{R}$ e.v.On dit que E est précomplexe s'il existe sur E une structure de $\mathbb{C}$ e.v qui par restriction du corps des scalaires ,induit la structure de $\mathbb{R}$ e.v.

1. Montrer que E est précomplexe $\Leftrightarrow \exists \phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)\phi^2 = -Id_E$
2. Montrer que si E est de dimension finie ,
   E est précomplexe $\Leftrightarrow dim_{\mathbb{R}}E$ est paire

Exercice 3
Montrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:
$(cos(\alpha x))_{\alpha \in \mathbb{R}^+}; (e^{\alpha x})_{\alpha \in \mathbb{R}}$

Exercice 4
Montrer que $((X - a)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$

Exercice 5 ***Base de Lagrange***
Soient $x_0, x_1, ..., x_n$(n+1) scalaires 2à2 $\neq$
On pose $L_k(X) = \prod\limits_{i=0_{i\neq k}}^{n} \frac{X-xi}{x_k-x_i}$

1. Calculer $L_k(x_j)$
2. Montrer que $(L_0, ...L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Exprimer $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base

Exercice 6
Soit E un $\mathbb{K}$ e.v et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$ la famille $(x, u(x))$ est liée.
Montrer que u est une homothétie.

Exercice 7 ***Interpolation de Lagrange***
On se donne $(n+1)$scalaires distincts $x_0, x_1, ..., x_n$ de $\mathbb{K}$. On considére l'application linéaire $f : P \in \mathbb{K}[X] \to (P(x_0), P(x_1), ..., P(x_n)) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

1. Déterminer le noyau et l'image de f
2. On considére un $(n + 1)$-uplet $(y_0, y_1, ..., y_n)$de $\mathbb{K}^{n+1}$
   Etablir qu'il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que
   $L(x_0) = y_0, ..., L(x_n) = y_n$ Déterminer à l'aide de L tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant ces n égalités
3. On note L_k ce polyôme L pour $(y_0, ...y_k, ..., y_n) = (0, ..., 1, ..., 0)$
   Montrer que $(L_0, ...L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Exprimer L dans cette base

Exercice 8
Soit f un endomorphisme de E

1. Etablir que $Ker(f) = Ker(f^2) \Leftrightarrow Im(f) \cap Ker(f) = \{0_E\}$
2. Etablir que $Im(f) = Im(f^2) \Leftrightarrow E = Im(f) + Ker(f)$
3. Etablir l'équivalence entre les quatres proprietés en dimension finie

Exercice 9 ***Rang des applications linéaires***

1. (a) Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ où E et F deux $\mathbb{K}$ev de dimensions finies
   Etablir que $dimKer(gof) \leq dimKer(f) + dimKer(g)$
   (b) Endéduire que si f est un endomorphisme de E alors $dimKerf^k \leq kdimKerf$
2. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ où E est de dimension finie .
   Montrer que $|rg(g) - rg(f)| \leq rg(f+g) \leq rg(g) + rg(f)$
3. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ où E et F deux $\mathbb{K}$ev de dimensions finies.
   Montrer que $rg(g) + rg(f) - dim(F) \leq rg(gof) \leq min(rg(g), rg(f))$

Exercice 10 ***Noyaux et Images itérés d'un endomorphisme***

1. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ev E
   (a) Etudier les variations des suites $(Ker(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ et$(Im(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$
   (b) Etablir que si $Ker(f^p) = Ker(f^{p+1})$alors $(Ker(f^k))_{k\geq p}$ est stationnaire .
   (c) Etablir que si $Im(f^q) = Im(f^{q+1})$alors $(Im(f^k))_{k\geq q}$ est stationnaire .
2. On introduit (s'ils existent)les deux nombres p et q suivants :
   $p = min\{k \in \mathbb{N}/Ker(f^k) = Ker(f^{k+1})\}$ et $q = min\{k \in \mathbb{N}/Im(f^k) = Im(f^{k+1})\}$
   (a) Etablir l'existence et l'égalité de p et q lorsque dimension E est finie
   (b) Lorsque E est dimension infinie,en supposant l'existence de p et q ,etablir par l'absurde l'égalité de p et q
   (c) En déduire que $E = Im(f^p) \oplus Ker(f^p)$

Exercice 11 ***Endomorphismes Nilpotents***
Soit E un $\mathbb{K}ev$ de dimension finie et f un endomorphisme de E.On dit que f est nilpotent d'indice p si $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$

1. On suppose f nilpotent d'indice p et x_0 tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$
   Montrer que la famille $\mathcal{F}_0 = (x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est libre dans E et deduire les valeurs possibles de p
2. Montrer ,pour un endomorphisme nilpotent d'indice p ,la suite d'inclusions strictes
   $\{0\} \subset Ker(f) \subset Ker(f^2) \subset ... \subset Ker(f^{p-1}) \subset Ker(f^p) = E$
3. Etablir que f est nilpotente d'indice dimE ssi $dim(Kerf) = 1$ Quelle est la matrice d'un tel endomorphisme dans $\mathcal{F}_{dimE}$
4. Montrer que si f est nilpotente d'indice p alors $Id_E - f$est inversible et expliciter son inverse

Exercice 12
Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$ ev E

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur ssi $poq = qop = 0$
2. Montrer dans ce cas que : $Im(p+q) = Im(p) \oplus Im(q)$ et $Ker(p+q) = Ker(p) \cap Ker(q)$

Exercice 13
Soit E un $\mathbb{C}$ ev de dimension finie ,$k \in \mathbb{N}^*, p_1, ..., p_k$ des projecteurs de E . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\sum_{j=1}^{k} p_j$ est un projecteur
- $\forall (i,j) \in \{1, ..., k\}^2 i \neq j \Rightarrow p_i o p_j = 0$

Exercice 14
Déterminer les bases duales de la base canonique et la base de Lagrange de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 15
Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par $\left\{\begin{array}{l} \varphi_1(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \varphi_2(x) = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \varphi_1(x) = x_1 + x_2 \end{array}\right.$
Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$ et en déterminer la base antéduale

Exercice 16
Montrer que toute forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$telle que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \varphi(AB) = \varphi(BA)$ est proportionnelle à la trace

Exercice 17 ***Matrice de trace nulle***

1. On considére un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ où $dim(E) < +\infty$
   (a) Etablir ,si la famille $(v, f(v))$ est liée pour tout $v \in E$ alors f est une homothétie
   (b) Etablir ,si f est non nul et de trace nulle ,qu'il existe $v \in E$tel que $(v, f(v))$ soit libre
   (c) En déduire,si f est de trace nulle ,l'existence d'une base $\mathfrak{B}$ dans laquelle $mat(f, \mathfrak{B}) = \begin{pmatrix} 0 & L_1 \\ C_1 & M_1 \end{pmatrix}$ L_1 :ligne et C_1 :colonne
2. Etablir qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice à diagonale nulle.

Exercice 18
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .Montrer que $det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$est positif

Exercice 19

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.Résoudre l'équation $X +^t X = tr(X)M$ où $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
2. $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.Résoudre l'équation $X + tr(X)A = B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Exercice 20 ***Matrice à diagonale dominante***
Soit $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\forall i |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} \mid a_{i,j} \mid$.Montrer que A est inversible.

Exercice 21

Caculer pour $a \neq b$le déterminant suivant $D_n = \begin{vmatrix} c & a & a & \cdots & a \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ b & & \ddots & \ddots & a \\ b & b & \cdots & b & c \end{vmatrix}$

Exercice 22

Exercice 23

Exercice 24

Exercice 25

Exercice 26

Exercice 27

Exercice 28

Exercice 29

Exercice 30

Exercice 31

Exercice 32