Centre Ibn Abdoune **13/11/2019**
Classes Préparatoires **MP 1**
Khouribga **ELOUADIH**

Série7: Réduction des endomorphismes

Exercice 1
Diagonaliser ou trigonliser dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}$$

Exercice 2
Soit $E = C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(f) = f''$

1. Déterminer les valeurs propres éventuels de u
2. Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est libre où $f_n(x) = sin(nx)$

Exercice 3
Soit s une symétrie de E .$\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi(f) = fos + sof$

1. Etablir que φ est diagonalisable
2. On suppose que dim(E)=n.
   En utilisant une base adaptée à $E = Ker(s - id_E) \oplus Ker(s + id_E)$,déterminer les matrices des endomorphismes appartenant aux differents sous espaces propres.

Exercice 4
Réduire les endomorphismes suivants :

1. $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ défini par $f(M) =^t M$
2. $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ défini par $g(M) = M + 2^t M$
3. $h \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ défini par $f(M) = AM$ où A est donnée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
4. (a) $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ défini par $u(M) = tr(M)I_n - M$
   (b) En déduire que si $n \neq 1$ alors u est inversible

Exercice 5
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A = \begin{pmatrix} 2M & M \\ M & 2M \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} M & -M \\ 2M & 4M \end{pmatrix}$
Montrer que si M est diagonalisable alors A et B le sont

Exercice 6

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Déterminer son polynôme caractéristique et ses sous espaces propres
2. Déterminer son polynôme minimal

Exercice 7 ***Localisation des valeurs propres (Hadamard-Gerschgorin)***
Montrer que toute valeur propre de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$est dans
$\cup_{i=1}^{n}\{z \in \mathbb{C}/|z - m_{i,i}| \leq \sum\limits_{j \neq i} |m_{i,j}|\}$

Exercice 8 ***Sous espaces stables par un endomorphisme***

1. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ e.v de dimension finie rapportté à une base B et H un hyperplan noyau d'une forme linéaire non nulle φ
   (a) Montrer que H est stable par $f \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \varphi o f = \lambda \varphi$
   (b) En déduire que si H est d'équation $u_1 x_1 + ... u_n x_n = 0$ alors
   H est stable $\Leftrightarrow u(u_1, ..., u_n)$ est vecteur propre de la matrice transposée de f
2. Déterminer tous les espaces stables par l'endomorphisme de$\mathbb{K}^3$ associé canoniquement à $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 10
Déterminer tous les espaces stables par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé canoniquement à
$M = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 11 ***Co-diagonalisation de deux endomorphismes***
Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie n.Montrer que deux endomorphismes f et g de E diagonalisent dans une même base dans les cas suivants :

1. f et g commutent et f admet n valeurs propres distinctes
2. f et g commutent et f et g sont diagonalisables

Exercice 12 ***Commutant d'un endomorphisme diagonalisable***
Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie n.Soit f et g deux endomorphismes de E .On suppose que f est diagonalisable .Soit $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de f et $r_1, ..., r_p$ leurs multiplicités

1. Etablir que $gof = fog \Leftrightarrow g$ laisse stable tous les sous espaces propres de f
2. En déduire la dimension du commutant de f: $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E)/gof = fog\}$

Exercice 13

Déterminer le commutant de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 14 ***Calcul des puissances d'une matrice***

1. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ où $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 15

Calculer le polynome caracteristique de $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & & \vdots & a_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 16

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que A est diagonalisable
2. Déterminer π_A
3. Calculer M^p pour $p \in \mathbb{N}$

Exercice 17

Soit E un $\mathbb{C}$ ev de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que u nilpotent ssi $Sp(u) = \{0\}$
2. Montrer que u nilpotent ssi $\forall k \in \{1, ..., n\} tr(u^k) = 0$

Exercice 18

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $u(P) = (X^2 - 1)P"(X) + 2XP'(X)$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Montrer que u est diagonalisable

Exercice 19

1. Montrer que $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable
2. Application :Calculer $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$

Exercice 20

Soit E un $\mathbb{C}$ ev de dimension finie n et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tel que uov-vou=u.

1. Vérifier que $\varphi : w \to wov - vow$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N} \varphi(u^k) = ku^k$
3. En déduire u est nilpotente

Exercice 21

Soit $n \in \mathbb{N}^*, A \in GL_n(\mathbb{K})$. Exprimer $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de χ_A

Exercice 22
Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$

Exercice 23
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$;Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Exercice 24
Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 25
Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})X^3 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 26
Soit $n \in \mathbb{N}^*, A \in GL_n(\mathbb{K})$.Montrer que $A^{-1} \in \mathbb{K}[A]$

Exercice 27
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ Trouver les valeurs propres de A , A est -t-elle diagonalisable ?

Exercice 28
Soit E un $\mathbb{R}$ ev de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = 4u$.Montrer que la trace de u est un nombre pair

Exercice 29
Soit E un espace de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$.On suppose qu'il existe x_0 de E tel que $B = (x_0 f(x_0), f^2(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ soit libre dans E Montrer que tout endomorphisme de E commutant avec f est un polynome en f

Exercice 30
Soit E un $\mathbb{K}$ev et $\in \mathcal{L}(E)$ Montrer que f commute avec un projecteur de E si et seulement si $Ker(p)$ et $Im(p)$ sont stables par f

Exercice 31
en utilisant le theoreme de Cayley Hamilton ,montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible et determiner son inverse

Exercice 32 ***Matrices stochastiques***
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, j \ a_{i,j} \in [0, 1]$ et $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$

1. Montrer que 1 est une valeur propre
2. Soit λ une valeur propre de A
   (a) Montrer que $|\lambda| \leq 1$
   (b) Montrer que $\exists i \in [1, n] |\lambda - a_{i,i}| \leq 1 - a_{i,i}$

"Certaines personnes ont un horizon de rayon zéro et l'appellent leur point de vue"
David Hilbert