Complexe Chourouk **21/04/2020**

1SM

Khouribga **ELOUADIH**

Série 14 : Géométrie analytique de l'espace

Exercice 1

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repere de l'espace. Etudier la colinearité des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

1. $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$
2. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$
3. $\overrightarrow{u}(1, 0 - 2m)$; $\overrightarrow{v}(2, 3m, -7)$
4. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{v}(m+1, m^2 - 2m - 3, 6)$

Exercice 2

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repere de l'espace. Etudier l'alignement des points A,B et C

1. $A(0,0,3); B(-1,0,0); etC(5,-3,4)$
2. $A(3,0,-2); B(1,5,-3); etC(-1,0,2)$
3. $A(4,12,6); B(2,6,8); etC(2,9,7)$

Exercice 3

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repere de l'espace. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont-ils coplanaires ?

1. $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{w} = -4\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} + 9\overrightarrow{k}$
2. $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{w} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{k}$
3. $\overrightarrow{u}(1,2,3$; $\overrightarrow{v} = (3,-6,1)$; $\overrightarrow{w}(2,-4,2)$
4. $\overrightarrow{u}(2m-1, 3, 5-m)$; $\overrightarrow{v}(-1,2,5)$; $\overrightarrow{w}(-3,1,7)$

Exercice 4

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repere de l'espace. Les points A,B,C et D sont ils coplanaires ?
$A(5,2,2); B(6,7,4); C(2,5,3)$ et $D(0,-5,-1)$

Exercice 5

Donner une représentation paramétrique et deux équationn cartésiennes de la droite $D(A, \overrightarrow{u})$ passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$

1. $A(-1,1,3)$ et $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$
2. $A(2,0,5)$ et $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$

Exercice 6

Donner une représentation paramétrique de la droite (AB)

1. $A(-1,1,3)$ et $B(1,0,1)$

2. $A(2,0,5)$ et $B(1,-1,0)$

Exercice 7
On considère la droite (D) dont une représentation paramétrique est :
$(D) : \begin{cases} x = 4+3t \\ y = -2+t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1-5t \end{cases}$
et les points de coordonnées A(1 ;9 ;1) et B(0 ;2 ;-1).
Quelle est la position relative de droites (D) et (AB).

Exercice 8
Donner une représentation paramétrique et une équation cartésienne du plan $(P(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

1. $A(-1,1,3)$; $\overrightarrow{u}(3,2,1)$ et $\overrightarrow{v}(-1,1,0)$
2. $A(2,0,5)$ et $\overrightarrow{u}(0,1,0)$ et $\overrightarrow{v}(1,1,1)$

Exercice 9
Donner une représentation paramétrique du plan (ABC)

1. $A(-3,2,0)$; $B(1,-1,2)$ et $C(4,-3,5)$
2. $A(1,0,2)$; $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$

Exercice 10
Donner une représentation paramétrique du plan (P)

1. $(P) : 2x-y+3z+7=0$
2. $(P) : x-y+z+1=0$

Exercice 11
Étudier l'intersection des deux plans : $(P) : x-4y+7=0$ et $(Q) : x+2y-z+1=0$

Exercice 12
Étudier l'intersection du plan (P) d'équation $z=2x$ avec la droite (D) définie par le système d'équations paramétriques : $(D) : \begin{cases} x = t-1 \\ y = -3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 \end{cases}$

Exercice 13
Déterminer la position relative des droites suivantes :

1. $(D) : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \\ z = -2+3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ et $(D') : \begin{cases} x = 1+\frac{1}{2}t' \\ y = 2-t' \\ z = 3-t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$
2. $(D) : \begin{cases} x = 2-2\lambda \\ y = \frac{1}{2}+\lambda \\ z = \frac{3}{2}+2\lambda \end{cases} (\lambda :\in \mathbb{R})$ et $(D') : \begin{cases} x = 1+u \\ y = -1-\frac{1}{2}u \\ z = -u \end{cases} (u \in \mathbb{R})$

Exercice 14
Déterminer la position relative du plan et la droite suivants :

$$(P) : \begin{cases} x = 2+\alpha+\beta \\ y = 1+\alpha \\ z = 3+\alpha+\beta \end{cases} ((\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2) \text{ et } (D) : \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = -7-3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Produit scalaire dans l'espace

Dans tout ce qui suit l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

Exercice 15
Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, $\|\overrightarrow{u}\|$, $\|\overrightarrow{v}\|$ dans les cas suivants :

1. $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$
2. $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j} + \frac{7}{5}\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{v} = -\frac{9}{10}\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + \frac{7}{2}\overrightarrow{k}$

Exercice 16
Calculer les longueurs des cotés du triangle (ABC)dans les cas suivants :

1. $A(-3, 1, 5); B(3, 5, 1); C(-1, 5, 5)$
2. $A(1, 1, 5); B(3, 5, 1); C(-1, 5, 1)$

Exercice 17
Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$dans les cas suivants :

1. $A(1; -2; 1)$; $\overrightarrow{n}(1, -1, 1)$
2. $A(-1; 0; 2)$; $\overrightarrow{n}(1, 0, -2)$

Exercice 18
Caculer $d(A,(P))$dans les cas suivants :

1. $A(-1, -1, 3)$ et $(P) : 2x - y + 2z + 1 = 0$
2. $A(0, 1, 2)$et $(P) : x - y + 3 = 0$

Exercice 19
Soit (P)le plan passant par A(-3 ;1 ;2) et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(1; 2; 1)$ Soit (D) la droite passant par B(2 ;1 ;5) et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1; 1; 1)$ Étudier l'intersection du plan (P)et de la droite(D)

Exercice 20

Soit $(P) : 2x + y - 3z + 1 = 0$ un plan et Soit $A(1; 11; 7)$ un point .

1. Montrer que Le point H, projeté orthogonal de A sur (P) a pour coordonnées $(2; \frac{23}{2}; \frac{11}{2})$
2. En déduire $d(A,(P))$

Exercice 21
Déterminer l'ensemble des points M(x,y,z) tels que :

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 2z = 0$
2. $x^2 + y^2 + z^2 - x - 4y - 3z + \frac{13}{2} = 0$
3. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 6z + \frac{21}{2} = 0$
4. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z + 18 = 0$

Exercice 22
Déterminer $(S) \cap (D)$dans les cas suivants :

1. $x^2+y^2+z^2+4x+2y-1=0$ et $(D) : \begin{cases} x=1+t \\ y=3+t \\ z=-3-2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$
2. $x^2+y^2+z^2+2y+4z=0$ et $(D) : \begin{cases} x=2+3t \\ y=4+t \\ z=-2+5t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

Exercice 23
Déterminer $(S)\cap(P)$dans les cas suivants :

1. $x^2+y^2+z^2-4x+y-2z-3=0$ et $(P) : x-2y+2z-3=0$
2. $x^2+y^2+z^2+6y-4z+9=0$ et $(P) : x-2y+z+1=0$
3. $x^2+y^2+z^2++2x-4z-7=0$ et $(P) : x+y+z-4=0$

Produit Vectoriel dans l'espace

Dans tout ce qui suit l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$

Exercice 24
Soit $\overrightarrow{u}$ et$\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tels que $\|\overrightarrow{u}\|=2$ et $\|\overrightarrow{v}\|=10$ et $\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}=\frac{\pi}{6}$
Calculer $\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|$

Exercice 25

Soit A,B et C trois points de l'espace.Déterminer l'ensemble des points M tel que

1. $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}$
2. $(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\wedge\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{0}$

Exercice 26
Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ dans les cas suivants :

1. $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$
2. $\overrightarrow{u}=3\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$
3. $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{j}-3\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{v}=2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$

Exercice 27
On considère les points$A(2,4,-5)$; $B(1,0,4)$ et $C(0,3,1)$

1. Montrer que A, B et C ne son pas alignés
2. Calculer l'aire du triangle (ABC)
3. Donner une équation cartésienne de (ABC)

Exercice 28
Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ et en déduire une équation de cartésienne du plan $P(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$dans les cas suivants :

1. $A(1,-2,3)$; $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{v}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{k}$
2. $A(1,-1,1)$; $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$

Exercice 29

Déterminer $(P) \cap (Q)$dans les cas suivants :

$(Q) : 2x + y - z + 4 = 0$ et $(P) : x - 2y + z - 3 = 0$

$(Q) : x - 2y + z - 3 = 0$ et $(P) : x - 2y + z + 1 = 0$

$(Q) : 3x - 2y - 3z + 2 = 0$ et $(P) : x + y + z - 4 = 0$

Exercice 30

Caculer $d(A, (D))$dans les cas suivants :

1. $A(2, 1, 3)$ et(D) : $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = -1 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + 2t \end{array} \right.$
2. $A(1, 1, 1)$et (D) : $\frac{x+1}{2} = -\frac{y}{2} = z - 1$