Complexe Chourouk **25/11/2019**

1SM

Khouribga **ELOUADIH**

Série4: Barycentre

Exercice 1

ABCD est un quadrilatère et G est la barycentre de $\{(A,1)(B,1)(C,3)(D,3)\}$. Construire le point G. (Argumenter)

Exercice 2

ABC est un triangle.

1. G est le barycentre de $\{(A,1)(B,2)(C,3)\}$. Construire le point G.
2. G' est le barycentre de $\{(A,1)(B,3)(C,-3)\}$. Construire le point G'.
3. Démontrer que (AG') est parallèle à (BC).

Exercice 3

B est le milieu de [AC]. Démontrer que le barycentre de (A, 1)(C, 3) est confondu avec celui de $\{(B,2)(C,2)\}$.

Exercice 4

Dans le triangle ABC, E est le milieu de [AB] et G est le barycentre de $\{(A,-2)(B,-2)(C,15)\}$. Démontrer que G, C et E sont alignés.

Exercice 5

On considère un triangle ABC et l'on désigne par G le barycentre de $\{(A,1),(B,4),(C,-3)\}$.

1. Construire le barycentre I de $\{(B,4),(C,-3)\}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{0}$
3. En déduire la position de G sur (AI).

Exercice 6

ABC est un triangle. On note G le barycentre de $\{(A,2),(B,1),(C,1)\}$. Construire le point G. (Argumenter)

Exercice 7

ABC est un triangle. Soit G le barycentre de $\{(A,1),(B,3),(C,3)\}$ Démontrer que les droites (AG) et (BC) sont parallèles.

Exercice 8

ABC est un triangle. On considère le barycentre A' de (B, 2) et (C, -3), le barycentre B' de (A, 5) et (C, -3) ainsi que le barycentre C' de (A, 5) et (B, 2). Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

Exercice 9
ABCD est un carré.

1. Quel est l'ensemble E des points M du plan tels que $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=AB$?
2. Représenter cet ensemble E.

Exercice 10
ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm. Déterminer l'ensemble G des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\|$

Exercice 11
[AB] est un segment de longueur 6 cm. Déterminer l'ensemble G des points M du plan tels que : MA = 2MB.

Exercice 12
Soient (ABC) un triangle .On considère les points E,F et G définies par :
$\overrightarrow{BF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC};$

1. Montrer que A,F et G sont alignés
2. Montrer que G est le barycentre de $\{(A,1),(B,-1),(C,3)\}$
3. Montrer que $(AB)//(CG)$

Exercice 13
Soient (ABC) un triangle , G est le barycentre de$\{(A,2),(B,1),(C,1)\}$,
M le milieu de $[BC]$ et N le point définie par $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

1. Montrer que $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{NG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{NC}$
2. Montrer que (AM) et (CN) se coupent en un point à déterminer

Exercice 14
Soient (ABC) un triangle .On considère les points I,J et K définies par :
I est le barycentre de$\{(A,3),(B,5)\}$ J est le barycentre de$\{(A,2),(C,7)\}$
K est le barycentre de$\{(B,-10),(C,21)\}$
Montrer que I,J et K sont alignés

Exercice 15
Soient (ABCD) un quadrilatère .On considère les points I,J et K définies par :
I est le barycentre de$\{(A,3),(C,-5)\}$ J est le barycentre de$\{(D,-1),(B,2)\}$
et H tel que $\overrightarrow{CH}=2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

1. Montrer que I,J et H sont alignés
2. Montrer que I est le milieu de $[JH]$

Exercice 16
Soient (ABC) un triangle .On considère les points G,D et H définies par :
$\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$
D est le milieu de $[AC]$
H est le barycentre de$\{(A,5),(B,2),(C,-3)\}$

1. Montrer que G est le milieu de $[BD]$

2. Montrer que $(GHAC)$ est un parallélogramme
3. Soit E le milieu de $[AB]$. Montrer que H,E et G sont alignés

Exercice 17
Soit (ABC) un triangle. Déterminer l'ensemble des points M tels que

1. $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient colinéaires
2. $2\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MB}$ et $4\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ soient colinéaires
3. $\|3\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}\|=5$
4. $\|3\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}\|=MB$
5. $\|-\alpha\overrightarrow{MA}+(\alpha+1)\overrightarrow{MB}\|=a$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}_+^*$
6. $\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}\|=45$
7. $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=a$
8. $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|\leq a$
9. $a\leq\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|\leq 2a$

Exercice 18
Soit (ABC) un triangle tel que $AB=4; AC=6$ et $BC=5$
et G est le barycentre de $\{(A,1),(B,2),(C,3)\}$

1. Calculer AH ;BH et CH
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que$\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\|=6$
3. Soit $(\mathcal{F})$l'ensemble des points M tels que$\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\|$
   (a) Montrer que $A\in(\mathcal{F})$
   (b) Déterminer $(\mathcal{F})$

Exercice 19
Soit (ABC) un triangle tel que $AB=c; AC=b$ et $BC=a$
La bissectrice intérieur de $\widehat{BAC}$ coupe $[BC]$ en E

1. Montrer que $\frac{BE}{CE}=\frac{c}{b}$
2. Montrer que E est le barycentre de$\{(B,b),(C,c)\}$
3. Soit I le centre du cercle circonscrit au triangle (ABC) . Montrer que I est le barycentre de$\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$

Exercice 20
Soit (ABC) un triangle tel que $AB=1; AC=\sqrt{3}$ et $BC=\sqrt{2}$ et G est le barycentre

de$\{(A,b+c),(B,a+c),(C,a+b)\}$ et f l'application $\begin{array}{ll}\mathcal{P} & \longrightarrow\mathbb{R}\\ M & \longmapsto a\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}+c\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MC}\end{array}$

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}$
2. Montrer que $(\forall M\in(\mathcal{P}))f(M)=f(G)+(a+b+c)MG^2$
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que$f(M)=a$