1SM(BIOF) **08/10/2020**

KHOURIBGA **ELOUADIH**

Série1: Logique

Exercice 1
Donner la verité des assertions suivantes :
$(P) : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})x^2 + y = y^2 + x$
$(Q) : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})x^2 + y = y^2 + x$
$(R) : (\forall x \in \mathbb{R})x^2 \leq x$
$(S) : (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$
$(T) : (\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3)x \neq y \text{et} y \neq z \Rightarrow x \neq z$

Exercice 2
Soit x un réel.Montrter que : $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)|x| \leq \varepsilon \Rightarrow x = 0$

Exercice 3
Soient a, b, c trois réels.Montrter que : $a + b + c = 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{2}$ ou $b \leq \frac{1}{2}$ ou $c \leq \frac{1}{2}$

Exercice 4
Montrer par récurrence :

1. $(\forall n \in \mathbb{N})5/2^{3n+5} + 3^{n+1}$
2. $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2)(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$
3. $(\forall n \in \mathbb{N})3/5^n - 2^n$
4. $(\forall n \in \mathbb{N}) \sum\limits_{k=1}^{n+1} k2^{k-1} = n2^{n+1} + 1$
5. $(\forall n \in \mathbb{N})111/10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$
6. $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum\limits_{k=1}^{n} (2k - 1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
7. $(\forall n \in \mathbb{N})6/n(2n + 1)(7n + 1)$
8. $(\forall n \in \mathbb{N})9/4^n + 15n - 1$
9. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)17/2^{3n-2} + 3 \times 5^{2n-1}$
10. $(\forall n \in \mathbb{N})7/3^{2n+1} + 2^{n+2}$
11. $(\forall n \geq 2) \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$
12. $(\forall n \in \mathbb{N}) \sum\limits_{k=0}^{n} (3k + 1) = \frac{3n^2+5n+2}{2}$
13. $(\forall n \in \mathbb{N})3^n \geq 1 + \sqrt{3}n$
14. $(\forall n \in \mathbb{N}) \sum\limits_{k=0}^{n} k(k - 1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$
15. $(\forall n \in \mathbb{N})6/5n^3 + n$
16. $(\forall n \in \mathbb{N})(1 + a)^n \geq 1 + na$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$
17. $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Exercice 5
Ecrire en langage formel les assertions suivantes
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application

1. f n'est la fonction nulle
2. f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$
3. f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$
4. f est la fonction constante

Exercice 6
Nier les assertions suivantes :

1. $(\exists M > 0)(\forall x \in \mathbb{R})|f(x)| \leq M$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
3. $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \neq 0$
4. Toutes les voitures rapides sont rouges
5. $\forall \varepsilon > 0 \exists q \in \mathbb{Q}^* 0 < q < \varepsilon$
6. $\overline{P} et Q ; \overline{P} ou Q ; P \Rightarrow \overline{Q}$

Exercice 7
Montrer que $(\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2) E(\frac{n+m}{2}) + E(\frac{n-m+1}{2}) = n$

Exercice 8

1. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 E(x) = E(y) \Rightarrow |x - y| < 1$
2. La réciproque est-t-elle vraie ?
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(x) = E(\sqrt{x})$

Exercice 9
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

1. $[\frac{x^2+x+1}{2}] = \frac{x+1}{2}$
2. $[\frac{x+4}{3}] = \frac{x-1}{2}$

Exercice 10
Montrer que

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 E(x + y) = E(x) + E(y) + \varepsilon$ avec $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 1$
2. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall p \in \mathbb{Z}) E(x + p) = E(x) + p$
3. $(\forall x \in \mathbb{R}) E(x + \frac{1}{2}) = E(2x) - E(x)$

Exercice 11
Montrer que $\sqrt{2} - \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 12
Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $|x| \leq \frac{1}{2}$ et $|y| \leq 1$
Montrer que $|4x^2 y - y - x| \leq \frac{17}{16}$

Exercice 13
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ Montrer que $x + y = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{y^2 +} + y) = 1$

Exercice 14

1. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 x^2 + xy + y^2 \geq 0$
2. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

Exercice 15
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha > 0$ Montrer que $\mid \frac{x+y}{2} \mid + \mid \frac{x-y}{2} \mid < \alpha \Rightarrow \mid x \mid < \alpha$ et $\mid y \mid < \alpha$

Exercice 16
Montrer que $\forall (p,q) \in \mathbb{Q}^2 p + q\sqrt{2} = 0 \Rightarrow p = q = 0$

Exercice 17